$\boxed{2}$ **【解答】** 扇形Dの中心をOとして、x, y, z 軸をそれぞれ南、東、真上方向にとる。このとき、光の方向ベクトルは $(-1, -1, -\sqrt{2})$ であるから もし壁がなければ Dの影はDを $(-1, -1, -\sqrt{2})$ 方向に平行移動したものとなる。よって平面 $z = -\sqrt{2}t(t \geqq 0)$ によるEの切り口は中心が $(-t, -t, -\sqrt{2}t)$ の $\dfrac{1}{4}$ 円盤 (ただし $x \geqq 0, y \geqq 0$) となる。
そこで下図のように $\theta(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4})$ をとり、平面 $z = -\sqrt{2}t(t \geqq 0)$ によるEの断面積を S とすると

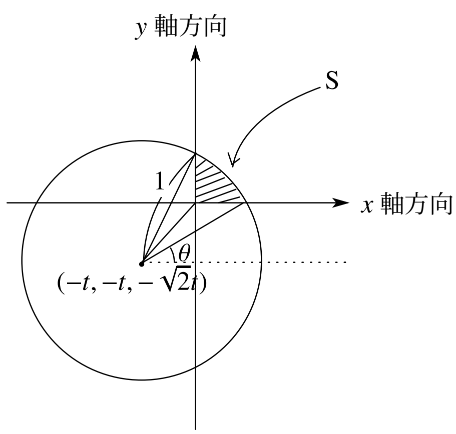
$$t = \sin\theta$$
$$z = -\sqrt{2}t = -\sqrt{2}\sin\theta$$
$$S = \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot 2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) - \frac{1}{2}t(\cos\theta - t)\times 2$$

☜扇形 − 三角形

$$= \left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) - \sin\theta(\cos\theta - \sin\theta)$$
$$\therefore V = \int_0^{-1}\left(\frac{\pi}{4} - \theta + \sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta\right)dz$$
$$= \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\left(\frac{\pi}{4} - \theta + \sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta\right)\cos\theta d\theta$$

z	-1	$\longrightarrow 0$
θ	$\frac{\pi}{4}$	$\longrightarrow 0$

$$= \frac{\sqrt{2}\pi}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\cos\theta d\theta - \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\theta\cos\theta d\theta + \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\sin^2\theta\cos\theta d\theta - \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\sin\theta\cos^2\theta d\theta$$
$$= \frac{\sqrt{2}\pi}{4}\Big[\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \sqrt{2}\Big[\theta\sin\theta + \cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{\sqrt{2}}{3}\Big[\sin^3\theta + \cos^3\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi - \frac{2}{3} \qquad \cdots(答)$$



Comment

この問題は洗面所の小物置き場を見て思い付きました。