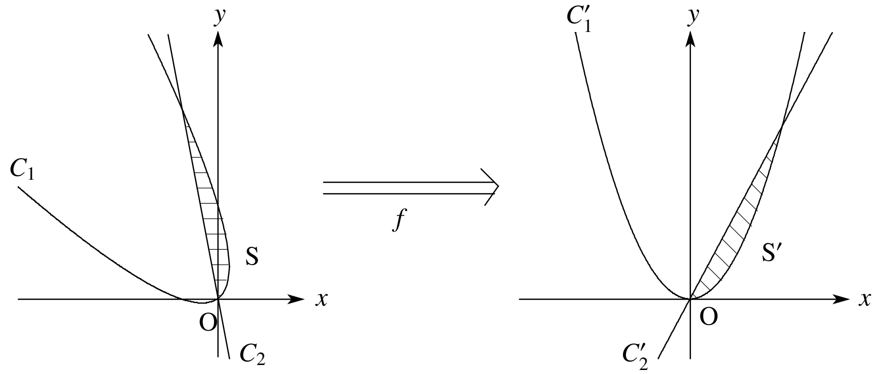
$\boxed{21}$ **【解答】**



$f: z \longmapsto \dfrac{1}{2+i}z,\ f$ による α, β の像を α', β' とすると

$$\begin{cases} \alpha' &= t + t^2 i \\ \beta' &= \dfrac{(s+si)(3+4i)}{2+i} = s + 3si \end{cases} \qquad \cdots①$$

よって α', β' の描く軌跡を C_1', C_2' とすると、その実数成分 x と虚数成分 y の関係は、

$$\begin{cases} C_1'\ ; & y = x^2 \\ C_2'\ ; & y = 3x \end{cases} \qquad \cdots②$$

従って C_1', C_2' の囲む面積を S′ とすると、

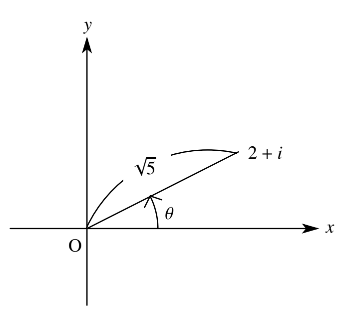
$$S' = \int_3^0 (3x - x^2)dx = -\int_3^0 x(x-3)dx = \frac{9}{2} \qquad \cdots③$$

ここで下図の角を θ とすると、f は $(-\theta)$ の回転と原点を中心とする $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ 倍の拡大の合成なので、

$$S' = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 S$$

ゆえに求める面積 S は、

$$S = 5 \times S' = \frac{45}{2} \qquad \cdots(答)$$



Comment

旧過程 Like な「変換を利用した求積問題」です。もちろん、パラメーターを利用して求める事も出来ます。ただ、下のような形で出題すると、パラメーターを利用する事は難しいでしょう。

【類題 1】 複素数平面上に、次の式で定められる点 α, β がある。

$$\begin{cases} \alpha &= (t+t^2 i)(2+i) \\ \beta &= (t+ti)(3+4i) \end{cases}$$

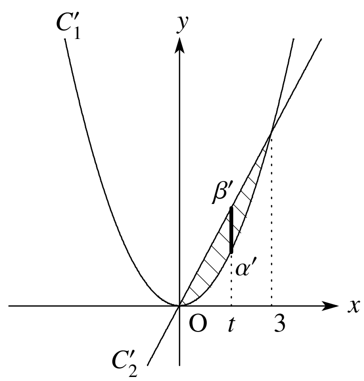
t が $0 \leqq t \leqq 3$ の範囲で変化する時 、線分 $\alpha\beta$ の通過する領域の面積 S を求めよ。

【解答】 $f: z \longmapsto \dfrac{1}{2+i}z$, f による α, β の像を α', β' とすると

$$\begin{cases} \alpha' &= \boldsymbol{t} + t^2 i \\ \beta' &= \dfrac{(t+ti)(3+4i)}{2+i} = \boldsymbol{t} + 3ti \end{cases}$$

α' と β' の実数成分が等しいので、線分 $\alpha'\beta'$ の通過する領域は 下図の斜線部分となる。よって求める面積 S は、本問題と同じで

$$S = \frac{45}{2} \qquad \cdots(\text{答})$$



【類題 2】も同様ですが、変換を使わずに区分求積法でも解けます。