$\boxed{22}$

【解答】(1)

$$f(z_0) = z_0 \iff z_0^2 - z_0 + 1 = z_0 \iff (z_0 - 1)^2 = 0 \iff z_0 = 1 \qquad \cdots(\text{答})$$

(2)

$$f(z) - f(z_0) = (z^2 - z + 1) - (z_0^2 - z_0 + 1) = (z + z_0 - 1)(z - z_0)$$

よって, $\arg(z + z_0 - 1) = \theta$, $|z + z_0 - 1| = r$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \xrightarrow[\theta\text{回転、}r\text{ 倍拡大}]{} \overrightarrow{\mathrm{AQ}} \qquad \cdots①$$

$AP = 2$ だから、①より

$$\triangle\mathrm{APQ} = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot AQ \cdot \sin\angle\mathrm{PAQ} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2r \cdot |\sin\theta|$$

ところが、$r\sin\theta$ は $(z + z_0 - 1)$ の虚数部分と等しいから

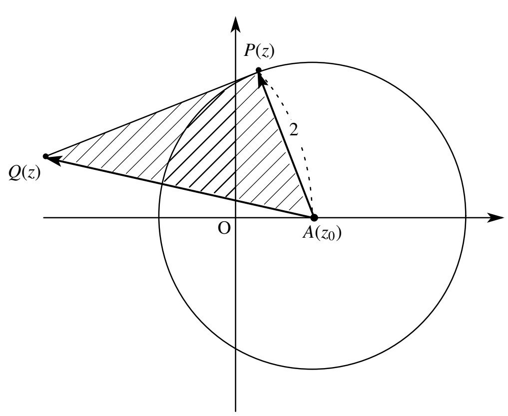
$$\triangle\mathrm{APQ} = 2\times\Big|(z + z_0 - 1)\text{ の虚数部分}\Big| = 2\times\Big|z\text{ の虚数部分}\Big| \qquad \cdots②$$

z は点 $A(1)$ を中心とする半径 2 の円周上を動くので、$\Big|z\text{ の虚数成分}\Big|$ は

$$z = 1 \pm 2i$$

の時に最大値 2 をとる。したがって三角形 APQ の最大値は

$$4\ (z = 1 \pm 2i\text{ のとき}) \qquad \cdots(\text{答})$$



Comment

同様の問題は $f(z)$ を 3 次関数などにしてもできます。(たいして難しくはないが本質的には同じ)