**【解答】**

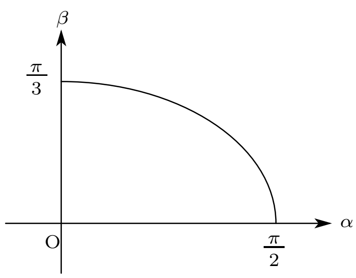
(1) $0<\alpha<\frac{\pi}{2}, 0<\beta<\frac{\pi}{2}$ の時、$(*)$ の両辺を $\alpha$ で微分して、

$$-\sin\alpha - 2\sin\beta\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}=0 \qquad \therefore\ \frac{d\beta}{d\alpha}=-\frac{\sin\alpha}{2\sin\beta}\ (<0) \qquad \cdots①$$

① の両辺を $\alpha$ で微分して、

$$\begin{aligned}\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}&=\frac{d}{d\alpha}(-\sin\alpha)\cdot\frac{1}{2\sin\beta}+(-\sin\alpha)\cdot\frac{d}{d\beta}\left(\frac{1}{2\sin\beta}\right)\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}\\&=\frac{-\cos\alpha}{2\sin\beta}+\sin\alpha\cdot\frac{\cos\beta}{2\sin^2\beta}\cdot\left(-\frac{\sin\alpha}{2\sin\beta}\right)<0\end{aligned} \qquad \cdots②$$

①,② より、グラフは図の通り。

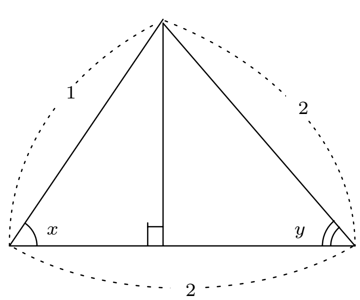



(2)$l$; $\alpha+\beta=k$ とおいて、$l$ と (1) のグラフが共有点を持つ $k$ の最大値が $\theta_0$ となる。 $l$ は、傾き $-1$ の直線だから、接点を $(x,y)$ とすると、

$$\left.\frac{d\beta}{d\alpha}\right|_{(\alpha,\beta)=(x,y)}=-1 \iff -\frac{\sin x}{2\sin y}=-1 \iff \sin x=2\sin y \qquad \cdots③$$

$(x,y)$ は、曲線 $(*)$ 上にあるから

$$\cos x+2\cos y=2 \qquad \cdots④$$




③,④ より, $x,y$ は左図の角となるから、余弦定理より

$$\cos(\pi-(x+y))=\frac{1^2+2^2-2^2}{1\cdot2\cdot2}=\frac{1}{4}$$

$\theta_0=x+y$ だから

$$\cos\theta_0=-\frac{1}{4} \qquad \cdots(答)$$

**【類題】** *parameter* を変えると、グラフはガラッと変わります。

実数 $\alpha, \beta$ $(0 \leqq \alpha \leqq \pi, 0 \leqq \beta \leqq \pi)$ が

$$2\cos\alpha + 3\cos\beta = -2 \qquad \cdots(*)$$

をみたしている。このとき次の問いに答えよ。

(1) 増減、凹 凸を調べて、$(*)$ のグラフを $\alpha - \beta$ 平面に書け。

(2) $\alpha, \beta$ が $(*)$ の条件をみたすとき、$\alpha + \beta$ の最小値を $\theta_0$ とする。$\cos\theta_0$ の値を求めよ。

**【解答】**

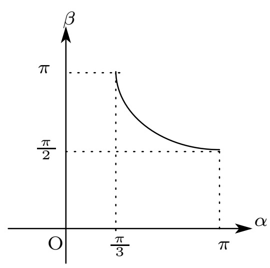
(1) $0 < \alpha < \pi, 0 < \beta < \pi$ の時、$(*)$ の両辺を $\alpha$ で微分して、

$$-2\sin\alpha - 3\sin\beta \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = 0 \qquad \therefore\ \frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{2\sin\alpha}{3\sin\beta}\ (<0) \qquad \cdots①$$

① の両辺を $\alpha$ で微分して、

$$\begin{aligned}\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} &= \frac{d}{d\alpha}(-2\sin\alpha)\cdot\frac{1}{3\sin\beta} + (-2\sin\alpha)\cdot\frac{d}{d\beta}\left(\frac{1}{3\sin\beta}\right)\cdot\frac{d\beta}{d\alpha} \\ &= \frac{-2\cos\alpha}{3\sin\beta} + 2\sin\alpha\cdot\frac{\cos\beta}{3\sin^2\beta}\cdot\left(-\frac{2\sin\alpha}{3\sin\beta}\right) \\ &= \frac{-2\cos\alpha\cdot 3\sin^2\beta - 4\sin^2\alpha\cos\beta}{9\sin^3\beta} = \frac{2\cos^2\beta + 3\cos\beta + 2}{3\sin^2\beta} > 0 \qquad \cdots②\end{aligned}$$

①,② より、グラフは図の通り。

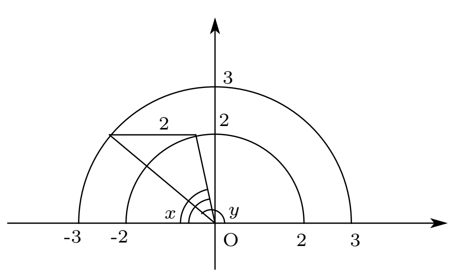



(2)$l;\ \alpha + \beta = k$ とおいて、$l$ と (1) のグラフが共有点を持つ $k$ の最小値が $\theta_0$ となる。 $l$ は、傾き $-1$ の直線だから、接点を $(x, y)$ とすると、

$$\left.\frac{d\beta}{d\alpha}\right|_{(\alpha,\beta)=(x,y)} = -1 \Longleftrightarrow -\frac{2\sin x}{3\sin y} = -1 \Longleftrightarrow 2\sin x = 3\sin y \qquad \cdots③$$

$(x, y)$ は、曲線 $(*)$ 上にあるから

$$2\cos x + 3\cos y = -2 \qquad \cdots④$$




③,④ より, $x, y$ は左図の角となるから、余弦定理より

$$\cos((x+y) - \pi) = \frac{2^2 + 3^2 - 2^2}{2\cdot 2\cdot 3} = \frac{3}{4}$$

$\theta_0 = x + y$ だから

$$\cos\theta_0 = -\frac{3}{4} \qquad \cdots(答)$$