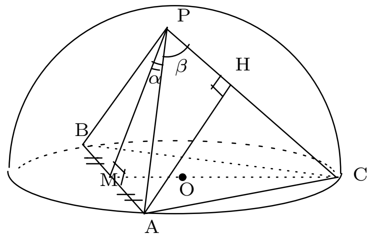
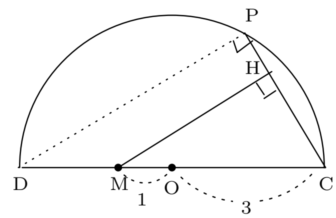
【解答】

$AB = 4\sqrt{2},\ AC = BC = 2\sqrt{6},\ AP = BP$





(1)△ABC の外心を O、AB の中点を M とする。 対称性より、$AH \perp PC$ のとき、$BH \perp PC$. よって平面 $ABH \perp$ 直線 PC となるので、$MH \perp PC$. そこで 3 点 M, C, P を通る断面図を考えて、

$$CH : HP = CM : MD = 4 : 2 = 2 : 1 \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) O を原点、OC 方向、AB 方向を、それぞれ x, y 軸方向にとり、$\angle \mathrm{COP} = \theta$ とおくと

$$C(3,0,0), A(-1,-2\sqrt{2},0), M(-1,0,0), P(3\cos\theta, 0, 3\sin\theta)$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta &= \frac{PM^2 + PH^2}{AP^2} = \frac{PM^2 + \left(\frac{1}{3}PC\right)^2}{AP^2} \\
&= \frac{(3\cos\theta+1)^2 + (3\sin\theta)^2 + \frac{1}{9}\left\{(3\cos\theta-3)^2 + (3\sin\theta)^2\right\}}{(3\cos\theta+1)^2 + (3\sin\theta)^2 + (2\sqrt{2})^2} \\
&= \frac{12 + 4\cos\theta}{18 + 6\cos\theta} = \frac{2}{3} \qquad \cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

(3) (2) より

$$\begin{aligned}
&\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \frac{2}{3} \iff \frac{1+\cos 2\alpha}{2} + \frac{1+\cos 2\beta}{2} = \frac{2}{3} \\
&\iff \cos 2\alpha + \cos 2\beta = -\frac{2}{3} \iff \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ だから $\cos(\alpha+\beta) < 0, \cos(\alpha-\beta) > 0$ ． よって「$\alpha+\beta$ が最小 $\iff \cos(\alpha+\beta)$ が最大」となるのは、$\cos(\alpha-\beta) = 1 \iff \alpha = \beta$ のとき。このとき、

$$\cos 2\alpha = \cos 2\beta = -\frac{1}{3},\ \cos\alpha = \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ゆえに、

$$\cos\phi = \cos(2\alpha + 2\beta) = \cos(2\cdot 2\alpha) = 2\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{9} \qquad \cdots(\text{答})$$

$2\pi < \phi < \frac{3\pi}{2}$ だから

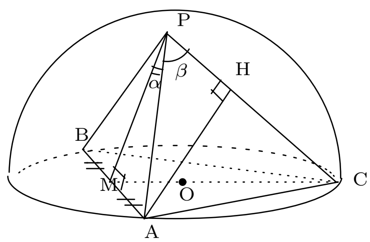
$$\sin\phi = -\sqrt{1 - \left(-\frac{7}{9}\right)^2} = -\frac{4\sqrt{2}}{9} \qquad \cdots(\text{答})$$

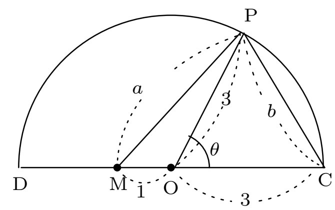
また、AP, CP の長さはそれぞれ

$$AP = 2\sqrt{3},\ CP = 6 \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) **【別解】**

$AB = 4\sqrt{2},\ AC = BC = 2\sqrt{6},\ AP = BP$





$PM = a, PH = b$ とおくと、右図より

$$\begin{cases} a^2 = 1^2 + 3^2 - 2\cdot 1\cdot 3\cdot \cos(\pi - \theta) = 10 + 6\cos\theta \\ b^2 = 3^2 + 3^2 - 2\cdot 3\cdot 3\cdot \cos\theta = 18 - 18\cos\theta \end{cases}$$

θ を消去して、

$$3a^2 + b^2 = 48 \qquad \cdots ①$$

一方 △APM, △APH より

$$\begin{cases} a = \frac{2\sqrt{2}}{\tan\alpha} \\ b = 3\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\sin\alpha}\cdot\cos\beta \end{cases} \qquad \cdots ②$$

①,② より

$$3\left(\frac{2\sqrt{2}}{\tan\alpha}\right)^2 + \left(\frac{6\sqrt{2}}{\sin\alpha}\cdot\cos\beta\right)^2 = 48 \Longleftrightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta = \frac{2}{3}$$

Comment

一般には $p\cos^2\alpha + q\cos^2\beta$($p, q$ 定数) の値が一定になります。(その後 $\boxed{23}$ と同様に解けば良い) しかし, ここでは計算を簡単にするため、$p = q$ となるように、△ABC の三辺の長さを選びました。