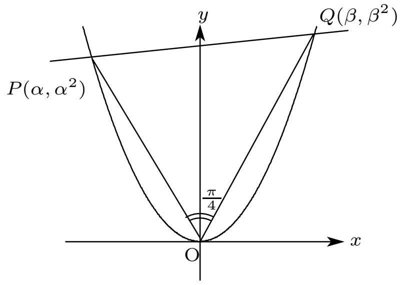
【解答】



$P(\alpha,\alpha^2),\ Q(\beta,\beta^2)$ とおくと

$$直線\ PQ; y=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}(x-\alpha)+\alpha^2=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta \quad \cdots①$$

直線 OP, OQ の傾きはそれぞれ α,β であるから $\angle\mathrm{POQ}=45°$ より

$$\left|\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}\right|=1\iff(\alpha-\beta)^2=(1+\alpha\beta)^2$$
$$\iff(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(1+\alpha\beta)^2 \quad \cdots②$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(\alpha,\alpha^2)\cdot(\beta,\beta^2)=\alpha\beta(1+\alpha\beta)>0 \quad \cdots③$$

ここで $\alpha+\beta=u,\ \alpha\beta=v$ とおくと①,②,③ より

$$①\iff\ y=ux-v\iff v=ux-y \quad \cdots①'$$
$$②\iff u^2-4v=(1+v)^2\iff(v+3)^2-8=u^2 \quad \cdots②'$$
$$③\iff v<-1, v>0 \quad \cdots③'$$

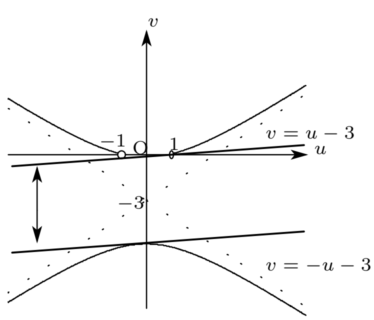
α,β は $t^2-ut+v=0$ の 2 解なので ②$'$ が成り立つとき、(判別式) $=u^2-4v\geqq0$ となり α,β は実数。よって ①$'$と②$'(v<-1,v>0)$ が $u-v$ 平面上で共有点を持たない (x,y) の条件を求めればよい。①$'$, ②$'$ を連立して

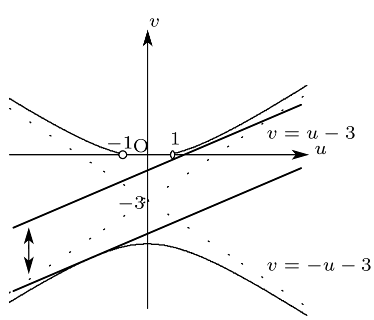
$$(xu-y+3)^2-8=u^2\iff(x^2-1)u^2+2x(3-y)u+(y^2-6y+1)=0 \quad \cdots④$$

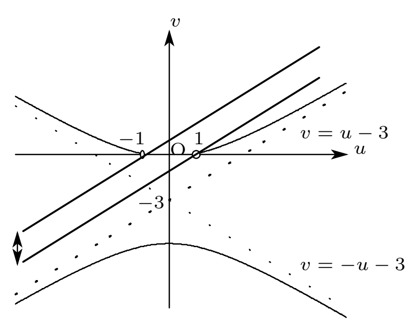
③$'$ の条件を考えないとき、①$'$, ②$'$ が接するのは、(④ の判別式)$=0$ より

$$(3-y)^2x^2-(x^2-1)(y^2-6y+1)=0\iff x^2+\frac{(y-3)^2}{(2\sqrt{2})^2}=1\iff 3-\sqrt{8-8x^2}\geqq y\geqq 3+\sqrt{8-8x^2}$$

対称性より $x\geqq0$ で考えてよい。②$'$ の $(1,0)$ における接線の傾きは $\frac{1}{3}$ であるから、図より







(i) $0\leqq x\leqq\frac{1}{3}$ のとき, ③$'$ が $(1,0)$ を通る $\iff y=x$ だから

$$-3-\sqrt{8-8x^2}\leqq -y\leqq -x\iff 3+\sqrt{8-8x^2}\geqq y\geqq x$$

(ii) $\frac{1}{3}<x<1$ のとき

$$-3-\sqrt{8-8x^2}\leqq -y\leqq -3+\sqrt{8-8x^2}\iff 3+\sqrt{8-8x^2}\geqq y\geqq 3-\sqrt{8-8x^2}$$

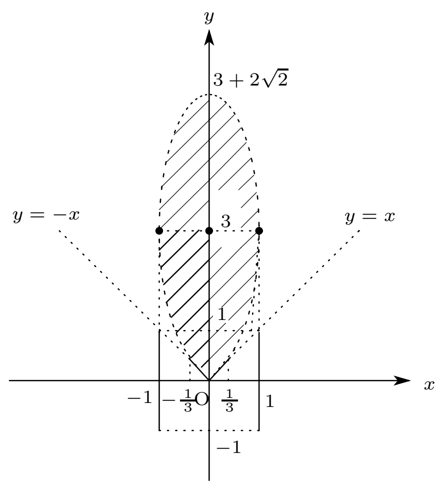
(iii) $x=1$ のとき, 傾き 1 の直線が $(1,0)$ を通る時切片は -1 だから

$$-1\leqq -y\leqq 1\iff 1\geqq y\geqq -1,\ \text{または}\ -y=-3\iff y=3$$

(iv) $x > 1$ のとき

①と②は必ず交点を持つので不適。

以上から、求める領域は下図の斜線部分【ただし楕円上の点は $(\pm 1, 3)$ のみ含む】



【類題】

放物線 $y = x^2$ 上の2点 P, Q が、$\angle \mathrm{POQ} = 45^\circ$ または 135° を満たしながら移動するとき、直線 PQ の通過しない領域を求め図示せよ。

【解答】

$v = ux - y$ と $u^2 - 4v = (1+v)^2 \Longleftrightarrow (v+3)^2 - 8 = u^2$ (ただし $v \fallingdotseq 0$) が $u - v$ 平面上で共有点を持たない (x, y) の条件を求めると、

$$x^2 + \frac{(y-3)^2}{(2\sqrt{2})^2} < 1,\ \text{または} (\pm 1, 3), \text{または} (0, 0)$$

下図の斜線部分【ただし楕円上の点は $(\pm 1, 3)$ のみ含む】