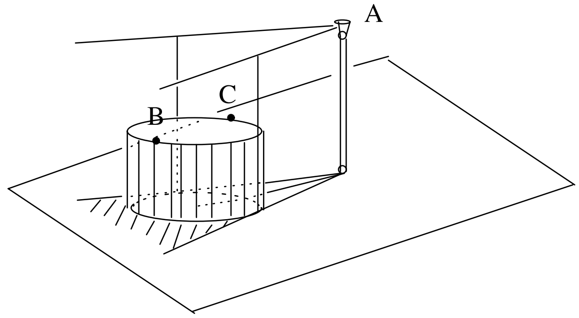
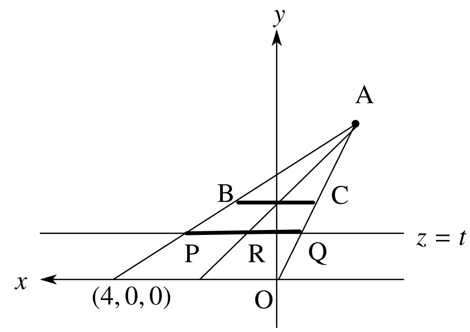
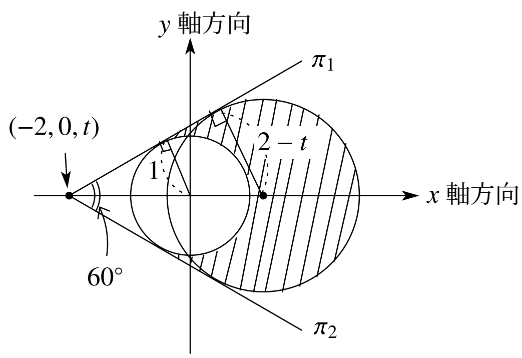
$\boxed{3}$ **【解答】**





底面の円の中心を原点、地面を xy 平面、街灯の頭を A$(-2, 0, 2)$ となるように座標軸をとり、B(1,0,1), C$(-1, 0, 1)$。さらに、点 A を通り円柱 D に接する平面を π_1, π_2 とする。2 平面 π_1, π_2 で 4 分割された領域のうち、円柱 D を含む領域以外には光が当たる。

次に、D の上面 $(x^2 + y^2 \leqq 1, z = 1)$ による影の、平面 $z = t\,(0 \leqq t \leqq 1)$ による切り口を求める。これは、上右図で $\triangle$ABC $\backsim$ $\triangle$APQ より、中心 R$(2(t-1), 0, t)$, 半径 $(2-t)$ の円の内部、および周から円柱 D をのぞいた領域となる。



平面 $z = t$ による断面

したがって、平面 $z = t\,(0 \leqq t \leqq 1)$ による D の影の断面は上図の斜線部分となり、その面積を $S(t)$ とすると、

$$\begin{aligned} S(t) &= \pi(2-t)^2 \times \frac{240^\circ}{360^\circ} + \{1 + (2-t)\} \times \sqrt{3}(1-t) - \pi \times 1^2 \times \frac{240^\circ}{360^\circ}\pi \\ &= \frac{1}{3}(2t^2 - 8t + 6)\pi + \sqrt{3}(t^2 - 4t + 3) \end{aligned}$$

よって求める体積 V は、

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{3}(2t^2 - 8t + 6)\pi + \sqrt{3}(t^2 - 4t + 3) \right\} dt \\ &= \frac{8}{9}\pi + \frac{4}{3}\sqrt{3} \end{aligned}$$

$\cdots$(答)

Comment

図形的に解かずに、計算だけで求める事もできます。(点 $P(x, y, t)$ と点 A を通る直線と、$x^2 + y^2 = 1$ の交点を考え、その z 座標が $0 \leqq z \leqq 1$ を満たすことから点 P の存在範囲を求める。)