【解答】 (1)X を 0 以上の整数, $0 \leqq \alpha < 1, h(x) = ax + b$ とすると $X \geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} f(X+\alpha) &= f(X-1+\alpha) + h(X-1) \\ &= f(X-2+\alpha) + h(X-1) + h(X-2) \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ &= f(0+\alpha) + \sum_{i=0}^{X-1} h(i) \\ &= f(\alpha) + a \cdot \frac{X(X-1)}{2} + bX \end{aligned}$$

X を固定して、α に関し微分すると

$$f'(X+\alpha) = f'(\alpha)$$

$f(x)$ が $X = k(k$ は自然数$)$ のとき微分可能であることから、任意の自然数 X に対し

$$\begin{cases} \lim_{\alpha \to 1-0} f(X+\alpha) = f(X+1) \\ \lim_{\alpha \to 1-0} f'(X+\alpha) = f'(X+1) \end{cases} \qquad \cdots ①$$

① の第 1 式より

$$\begin{aligned} &\lim_{\alpha \to 1-0} \{f(\alpha)\} + a \cdot \frac{X(X-1)}{2} + bX = f(0) + a \cdot \frac{X(X+1)}{2} + b(X+1) \\ &\iff 1 + c + +a \cdot \frac{X(X-1)}{2} + bX = a \cdot \frac{X(X+1)}{2} + b(X+1) \\ &\iff -aX + (-b + c + 1) = 0 \iff a = 0, c - b + 1 = 0 \end{aligned} \qquad \cdots ②$$

① の第 2 式 より

$$\lim_{\alpha \to 1-0} f'(\alpha) = f'(0) \iff \lim_{\alpha \to 1-0} (3x^2 + 2cx) = 0 \iff 3 + 2c = 0 \qquad \cdots ③$$

②,③ より

$$a = 0, b = -\frac{1}{2}, c = -\frac{3}{2}$$

(2) (1) より

$$\begin{cases} f(X+\alpha) = f(\alpha) - \frac{1}{2}X & (X = 1, 2, 3 \cdots) \\ f(\alpha) \quad = \alpha^3 - \frac{3}{2}\alpha^2 & (0 \leqq \alpha < 1) \end{cases}$$

よって m を自然数とするとき

$$\int_{m-1}^{m} f(x)dx = -\frac{1}{2}\int_{m-1}^{m} (m-1)dx + \int_0^1 (\alpha^3 - \frac{3}{2}\alpha^2)d\alpha = -\frac{m-1}{2} - \frac{1}{4}$$

よって

$$\int_0^n f(x)dx = \sum_{m=1}^{n} \left(-\frac{m-1}{2} - \frac{1}{4}\right) = -\frac{n^2}{4} \qquad \cdots (答)$$