$\boxed{4}$ **【解答】** 曲線 C 上の点を $P(t, 0, \sqrt{t})$, 筆の先の点を $Q(x, y, 0)$ とおく。PQ= 1 より

$$(x-t)^2 + y^2 + (\sqrt{t})^2 = 1$$
$$\therefore\ t^2 + (-2x+1)t + x^2 + y^2 - 1 = 0 \qquad \cdots ①$$

$t \geqq 0$ であるから、① が少なくとも１つ ０以上の実数解をもつ (x, y) の領域がＥとなる。

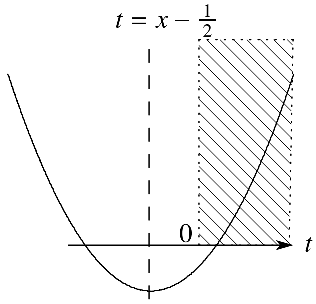
$$f(t) = t^2 + (-2x+1)t + x^2 + y^2 - 1$$
$$= \left(t - \frac{2x-1}{2}\right)^2 + x + y^2 - \frac{5}{4} \text{ とおくとき}$$
$$Y = f(t) \text{ の軸は } t = x - \frac{1}{2}$$

したがって，① が少なくとも１つ ０以上の実数解をもつ条件は

(i)$x \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$f(0) = x^2 + y^2 - 1 \leqq 0$

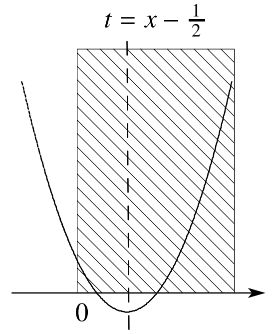
$\Longleftrightarrow x^2 + y^2 \leqq 1$



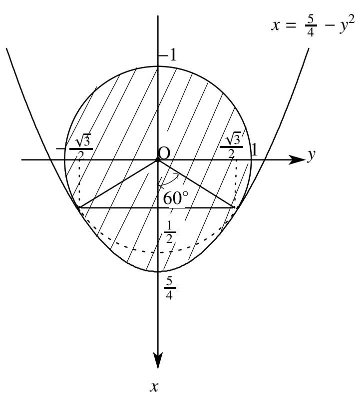
(ii) $x > \dfrac{1}{2}$ のとき

$f(x - \frac{1}{2}) = x + y^2 - \dfrac{5}{4} \leqq 0$

$\Longleftrightarrow x \leqq \dfrac{5}{4} - y^2$



$x^2 + y^2 = 1$ と $x = \dfrac{5}{4} - y^2$ は $\left(\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ で接するので、領域Ｅは左下図の斜線部分となる。



よってＥの面積Ｓは

$$S = \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{240^\circ}{360^\circ} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{\left(\frac{5}{4} - y^2\right) - \frac{1}{2}\right\} dy$$
$$= \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$
$$= \frac{2\pi}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{4} \qquad \cdots (答)$$