

4 【解答】 曲線 C 上の点を $P(t, 0, \sqrt{t})$, 筆の先の点を $Q(x, y, 0)$ とおく。 $PQ=1$ より

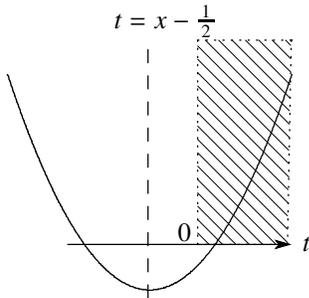
$$\begin{aligned} (x-t)^2 + y^2 + (\sqrt{t})^2 &= 1 \\ t^2 + (-2x+1)t + x^2 + y^2 - 1 &= 0 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

$t \geq 0$ であるから、 $\textcircled{1}$ が少なくとも 1 つ 0 以上の実数解をもつ (x, y) の領域が E となる。

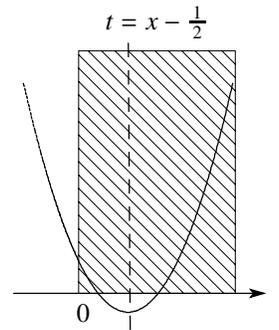
$$\begin{aligned} f(t) &= t^2 + (-2x+1)t + x^2 + y^2 - 1 \\ &= \left(t - \frac{2x-1}{2}\right)^2 + x + y^2 - \frac{5}{4} \text{ とおくととき} \\ Y = f(t) \text{ の軸は } t &= x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

したがって、 $\textcircled{1}$ が少なくとも 1 つ 0 以上の実数解をもつ条件は

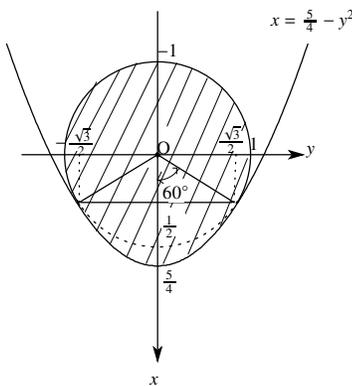
$$\begin{aligned} \text{(i) } x &\leq \frac{1}{2} \text{ のとき} \\ f(0) &= x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 &\leq 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{(ii) } x &> \frac{1}{2} \text{ のとき} \\ f\left(x - \frac{1}{2}\right) &= x + y^2 - \frac{5}{4} \leq 0 \\ \Leftrightarrow x &\leq \frac{5}{4} - y^2 \end{aligned}$$



$x^2 + y^2 = 1$ と $x = \frac{5}{4} - y^2$ は $\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ で接するので、領域 E は左下図の斜線部分となる。



よって E の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{240^\circ}{360^\circ} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{ \left(\frac{5}{4} - y^2\right) - \frac{1}{2} \right\} dy \\ &= \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{6} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 \\ &= \frac{2\pi}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{4} \end{aligned} \quad \dots \text{(答)}$$