

5 【解答】円柱の側面上の1点 $(0, \cos \theta, \sin \theta)$ を通り中心軸 (x 軸) と平行な直線を $m(\theta)$ とすると

$$m; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1}$$

円錐の側面の方程式は

$$3(x^2 + y^2) = (z - 2)^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

①と②を連立して

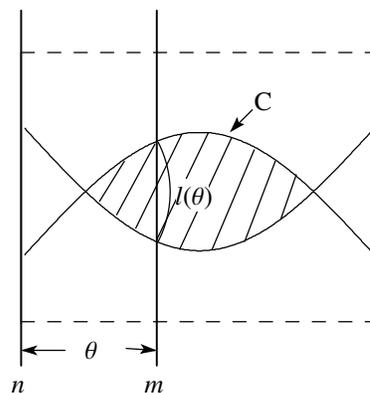
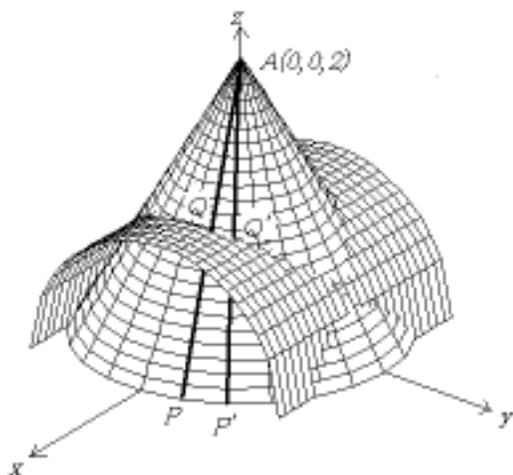
$$\begin{aligned} 3(t^2 + \cos^2 \theta) &= (\sin \theta - 2)^2 \\ 3t^2 &= \sin^2 \theta - 4 \sin \theta + 4 - 3(1 - \sin^2 \theta) \\ &= 4 \sin^2 \theta - 4 \sin \theta + 1 \\ &= (2 \sin \theta - 1)^2 \end{aligned}$$

ゆえに①と②の交点の距離を $l(\theta)$ とすると

$$l(\theta) = 2|t| = \frac{2}{\sqrt{3}} |2 \sin \theta - 1| \quad \dots \textcircled{3}$$

ところが $m(\theta)$ は円柱と xy 平面との交線の1つである $n; y = 1, z = 0$ を x 軸の周りに θ 回転した直線であるから n を切り口として円柱を展開したとすると $m(\theta)$ と n の間の距離は $1 \times \theta = \theta$ 。よってその展開図 (但し $z = 0$ の範囲) は図のようになる。したがって求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} l(\theta) d\theta \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (2 \sin \theta - 1) d\theta \\ &= 4 - \frac{4\sqrt{3}}{9} \pi \quad \dots (\text{答}) \end{aligned}$$



円柱の展開図