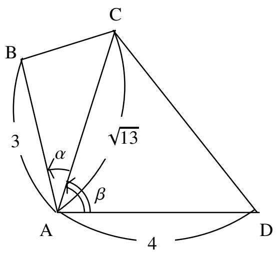
$\boxed{9}$

【解答】



$\mathrm{BC}^2 + \mathrm{CD}^2 = 25$

$\angle \mathrm{BAC} = \alpha,\ \angle \mathrm{CAD} = \beta$ とおくと、余弦定理より

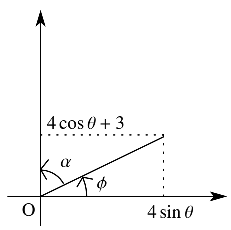
$$\begin{cases} BC^2 = 3^2 + AC^2 - 2 \cdot 3 \cdot AC \cdot \cos\alpha \\ CD^2 = 4^2 + AC^2 - 2 \cdot 4 \cdot AC \cdot \cos\beta \end{cases} \qquad \cdots①$$

$BC^2 + CD^2 = 25$ だから、① より

$$AC = 3\cos\alpha + 4\cos\beta \qquad \cdots②$$

ここで $\angle \mathrm{BAD} = \theta$ とおくと

$$\begin{aligned} AC &= 3\cos\alpha + 4\cos(\theta - \alpha) \\ &= 3\cos\alpha + 4(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha) \\ &= 4\sin\theta\sin\alpha + (4\cos\theta + 3)\cos\alpha \\ &= \sqrt{25 + 24\cos\theta}\ \sin(\alpha + \phi) \end{aligned}$$



$$\left(\text{但し、} \sin\phi = \frac{4\cos\theta + 3}{\sqrt{25 + 24\cos\theta}},\ \cos\phi = \frac{4\sin\theta}{\sqrt{25 + 24\cos\theta}} \right)$$

ゆえに、

$$AC \leqq \sqrt{25 + 24\cos\theta}\ (\text{等号は } \alpha + \phi = 90^\circ \text{ のとき}) \qquad \cdots③$$

$AC = \sqrt{13}$ だから、③ より

$$\sqrt{25 + 24\cos\theta} \leqq \sqrt{13} \iff \cos\theta \leqq -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad 0^\circ < \theta \leqq 120^\circ < 180^\circ \qquad \cdots④$$

逆に、$0^\circ < \phi < 90^\circ$ となり $\alpha + \phi = 90^\circ$ をみたす α は存在する。

ゆえに、θ の最大値は

$$\theta = 120^\circ \qquad \cdots(\text{答})$$

Comment

この問題のポイントは 2 点あります。1 つは、② の式を導く点。 2 つめは、$\alpha + \beta = \theta$ とおいて ② が解を持つ条件を求める点です。（いわゆる「逆手法」ですが、このような「逆手法」はあまりないのではないでしょうか？ なお、計算が超大変ですが、「順手法」でも出来ます。）

またこの時、BC=4,CD=3 となります。(問題 10 参照）