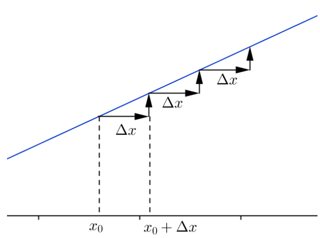
# 指数関数の「イメージ」

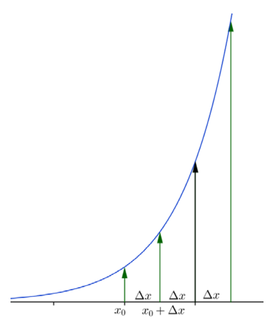
2013年4月

生越　茂樹

# § 1.一次関数と指数関数




$y = f(x) = ax + b$ (一次関数) は,
$x$ の値が 一定の量($\Delta x$) 増えた時,
$y$ の増える量が一定の関数.
$\left( f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \text{ が } x_0 \text{ によらず一定} \right)$




指数関数.ggb

$y = f(x) = a^x$ (指数関数) は,
$x$ の値が 一定の量($\Delta x$) 増えた時,
$y$ の増える割合が一定の関数.
$\left( \dfrac{f(x_0 + \Delta x)}{f(x_0)} \text{ が } x_0 \text{ によらず一定} \right)$

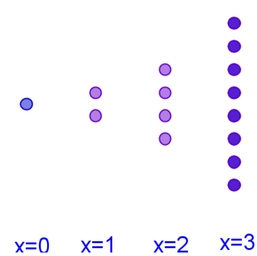
# §2.指数関数の例

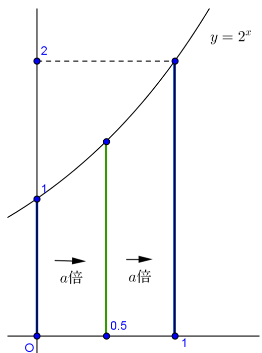
「指数関数」は，等比数列の変域を「自然数 (1,2,3,…) 」から
「実数 」に広げたものです.　等比数列の例(折りたたみ)

例えば, (大雑把な話になりますが)
1. ウイルスの数を $y$, 時間を $x$ とすると, $y$ は $x$ の指数関数になります.
　(多くの生物は，十分に食物があれば，指数関数的に増加する.) 等比数列の例
2. 放射性物質の量を $y$, 時間を $x$ とすると, $y$ は $x$ の指数関数になります.
　騒音の量を $y$, 壁の厚さを $x$ とすると, $y$ は $x$ の指数関数になります.
　(指数関数的減少は，物理の多くの分野で見られます.)

# §3. 指数関数の定義
## -「ウィルスの数と 時間 の関係」を, 例にとって考える-

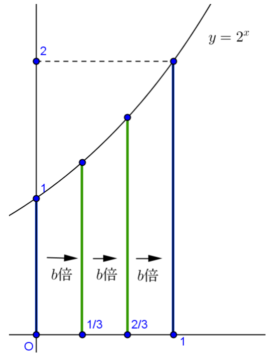
ある微生物は分裂によって増殖し，一定の環境の下で，
1日たつとちょうどその数が２倍になると言う.
２日後には４倍，３日後には８倍，一般に $n$ 日後には
$2^n$ 倍になる.
もちろん，この微生物の数は１日後に突然2倍になる
のではなく，だんだん数を増していき，１日たつと２倍
になるのである．では，
半日後(0.5日後)には何倍になるのだろうか.
8時間後(1/3日後)には何倍になるのだろうか.
また1日半後(1.5日後)には何倍になるだろうか.
指数関数は，このような問題を考えるのに適した関数
である.　いまの場合，"2を底とする指数関数"
を使えばよい. $x$ が必ずしも自然数でなくとも, $x$ 日後の
微生物の数は $2^x$ 倍になる.　(『啓林館 基礎解析』より)





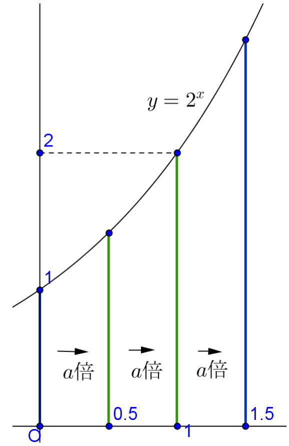

$a^2=2$ より, $a=\sqrt{2}$

$\therefore\ 2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$




$b^3=2$ より, $b=\sqrt[3]{2}$

$\therefore\ 2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$




$\frac{3}{2}=3\cdot\frac{1}{2}$ より, 1.5日後は $(\sqrt{2})^3$

$\therefore\ 2^{\frac{3}{2}}=(2^{\frac{1}{2}})^3=(\sqrt{2})^3$

以上より, $n,\ m$ が自然数の時 $\boxed{2^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{2}\ ,\ 2^{\frac{m}{n}}=(2^{\frac{1}{n}})^m=(\sqrt[n]{2})^m}$

一般に, $a$ を正の数とすると $\boxed{a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}\ ,\ a^{\frac{m}{n}}=(a^{\frac{1}{n}})^m=(\sqrt[n]{a})^m}$

1日たつと2倍に増える微生物は, (0日後)は 1倍に増えるから,

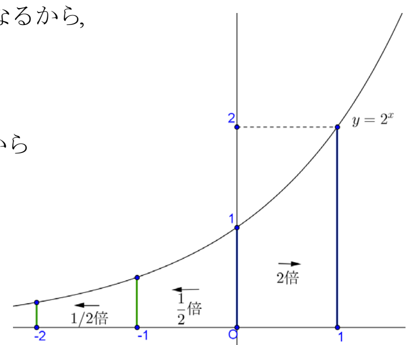
$$\boxed{2^0=1}$$

(−1日後) には $\frac{1}{2}$倍, (−2日後) には, $\frac{1}{2^2}$倍 になるから,

$$2^{-1}=\frac{1}{2},\ 2^{-2}=\frac{1}{2^2}$$

同様に, $\left(-\frac{1}{2}\text{日後}\right)$には, $\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}$ $\left(=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$倍 になるから

$$2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}$$




一般に, $t$ が正の数の時 $\boxed{2^{-t}=\frac{1}{2^t}}$

以上をまとめると, 正の数 $a$ に対し $\boxed{a^0=1,\ a^{-t}=\frac{1}{a^t}}$

これで 有理数 $x$ に対し, $a^x$ が完全に定義された.

【参考】$x$ が無理数の時は, 極限を考える. 例えば 「$\sqrt{2}$=1.414… 」だから

「$2^{1.4}, 2^{1.41}, 2^{1.414}\cdots$」とすれば, いくらでも $2^{\sqrt{2}}$ に近い値を求める事が出来る.

# §4.指数法則

$a,b$ は正の数で $x,y$ は実数とします. このとき,

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{I.} & a^x \times a^y = a^{x+y} \\ \text{I}' & a^x \div a^y = a^{x-y} \\ \text{II.} & (a^x)^y = a^{xy} \\ \text{III.} & (ab)^x = a^x b^x \end{array}}$$

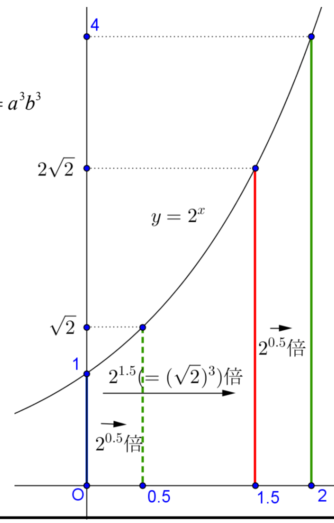
[例]

I. $2^3 \times 2^2 = (2\times2\times2)\times(2\times2) = 2^5$

I' $2^3 \div 2^5 = \dfrac{2\times2\times2}{2\times2\times2\times2\times2} = \dfrac{1}{2^2} = 2^{-2}$

II. $(2^3)^2 = (2\times2\times2)\times(2\times2\times2) = 2^6$

III. $(ab)^3 = ab{\cdot}ab{\cdot}ab = (a{\cdot}a{\cdot}a)\times(b{\cdot}b{\cdot}b) = a^3b^3$




上の「指数法則」は $x,y$ が実数の時も成り立つ.

例えば 「$2^{1.5}\times 2^{0.5} = 2^{1.5+0.5} = 2^2 \ (=4)$」

(これは次の質問を考えると明らかになります.)

質問 $\boxed{\text{「1.5日後} \to \text{2日後」の 0.5 日間では微生物は何倍に増えるか？}}$

「微生物の増える割合は一定」だから,

「1.5日後 $\to$ 2日後」に増える割合も

「0日後 $\to$ 0.5日後」に増える割合も等しい.

よって, $\dfrac{2^2}{2^{1.5}} = 2^{0.5}$　　$\therefore\ 2^{1.5}\times 2^{0.5} = 2^2 \ (=4)$

---

同様に考えると,「$x,y$ が 0 以上の実数のとき $2^x \times 2^y = 2^{x+y}$」が成り立つ.

また 「$2^{0.5}\times 2^{2.5} = 2^3$」より, 「$2^3 \times 2^{-0.5} = 2^{2.5}$」が得られるように,

「実数の計算法則」から「全ての実数 $x,y$ に対し $2^x \times 2^y = 2^{x+y}$」が言える.

よって, 正の数 $a$ に対し $\boxed{\text{I. } a^x \times a^y = a^{x+y},\ \text{I}'. a^x \div a^y = a^{x-y}}$ が成り立つ.

IIの法則は, Iに「実数の計算法則」を組み合わせるだけで導ける.

例えば, $y$ が整数のとき ($x$ は任意の実数), Iより,

$$(a^x)^3 = a^x \times a^x \times a^x = a^{x+x+x} = a^{3x}$$

よって， $(a^x)^{-3} = \dfrac{1}{(a^x)^3} = \dfrac{1}{a^{3x}} = a^{-3x}$

ゆえに, $y$ が整数の時は 「$(a^x)^y = a^{xy}$」が成り立つ. $y$ が分数の時は

何乗かして等しくなることを言えばよい. 例えば $y = \dfrac{1}{3}$ の時,

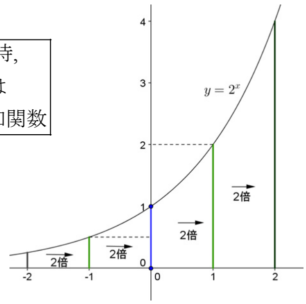
3乗して, $\left((a^x)^{\frac{1}{3}}\right)^3 = (a^x)^{\frac{1}{3}\times 3} = a^x \cdots$①, $\left(a^{\frac{x}{3}}\right)^3 = a^x \cdots$② .

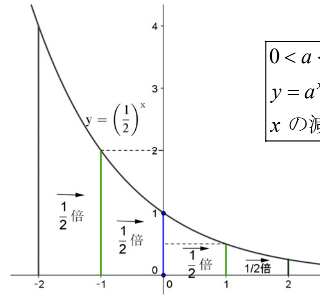
「$A,B$ が正の時, $A^3 = B^3 \Longleftrightarrow A = B$」だから, ①,②より $(a^x)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{x}{3}}$

IIIの法則も, 同様にIに「実数の計算法則」を組み合わせるだけで導ける.

# § 5.指数関数(y=a^x)のグラフ

$a>1$ の時,
$y=a^x$ は
$x$ の増加関数




$0<a<1$ の時,
$y=a^x$ は
$x$ の減少関数

もし２匹のねずみが １匹の子供しか生まないとしたら，$n$ 世代後には ,ねずみの数は$\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 倍 になる．

また, 放射能物質の場合は, 半減期毎に，物質の数が $\frac{1}{2}$倍になる．故に $x$ の単位を「1 世代」または

「半減期」とし , $x$ 単位たった時に $y$ 倍になったとすると, "底が$\frac{1}{2}$の指数関数"「$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$」となる.

「$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$」のグラフと「$y=2^x$」のグラフは, $y$軸対称になる.「$y=2^x$」に従って増える微生物を

ビデオに撮って「逆戻し」をすると，「$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$」に従って減少する生物に見える.

# § 6.練習問題

放射性ヨウ素の半減期は 8日である．次の問いに答えよ．
(1) 24日たつと，放射性ヨウ素は 初めの何分の 1 になるか.
(2) 4日たつと，放射性ヨウ素は 初めの何分の 1 になるか.
(3) 10日たつと，放射性ヨウ素は 初めの何分の 1 になるか.