対数関数の「イメージ」

2013年4月

生越　茂樹

§1. 対数関数の定義

「1 日たつ毎に 2 倍に増える微生物は x 日後には 2^x倍に増えた.
即ち, 1日後には 2 倍, 2日後には 4 倍, 3日後には 8 倍になる.
では, 3倍に増えるまでの日数はいくらか?

即ち 「$2^x = 3$ となる x」はいくらか? 簡単には求まらない.
よって, この様な x を「$x = \log_2 3$」と表す. 即ち

$$2^x = 3 \Longleftrightarrow x = \log_2 3 \quad \text{(3倍に増えるまでの日数)}$$

同様に, 5倍に増えるまでの日数は $\log_2 5$ と表せる.

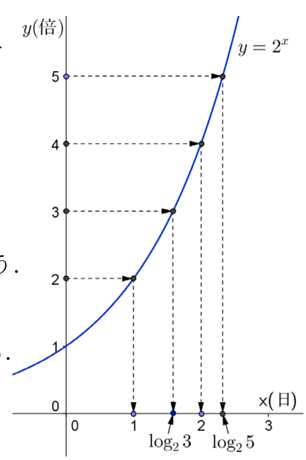
一般に, $M > 0$ のとき, $2^x = M$ となるx はただ1つ存在する.
この様な x を $\log_2 M$ と表し, "2を底とする対数関数"という.

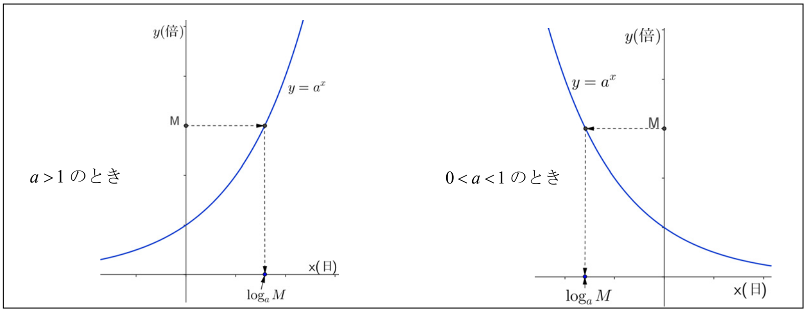
$$\boxed{M > 0 \text{ のとき,} \quad 2^x = M \Longleftrightarrow x = \log_2 M}$$

$\log_2 M$ は「2を何乗するとM になるか」を表す数と言える.
(= 1 日あたり 2 倍に増える微生物が M 倍になるまでの日数)

例えば, $\log_2 8 = 3$, $\log_2 16 = 4$, $\log_2 \sqrt{2} = \dfrac{1}{2}$, $\log_2 \dfrac{1}{4} = -2$.

特に, $\log_2 2 = 1$, $\log_2 1 = 0$





一般に $a>0,\ a\neq 1,\ M>0$ のとき, $a^x=M$ となる x はただ1つ存在する.
このような x を $\log_a M$ と表し, "a を底とする対数関数" という.

即ち, $\boxed{a^x=M \Longleftrightarrow x=\log_a M}$ (注: Mを"真数"と呼ぶ)

$\log_a M$ は「a を何乗するとMになるか」を表す数と言える.

例えば, $\log_3 9=2,\quad \log_4 16=2,\quad \log_5\dfrac{1}{25}=-2,\quad \log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{4}=2,\quad \log_{\frac{1}{2}}2=-1.$

特に, 任意の a $(a>0,\ a\neq 1)$ に対し $\boxed{\log_a a=1,\quad \log_a 1=0}$ $(\Longleftrightarrow a^{\boxed{1}}=a,\ a^{\boxed{0}}=1)$

また 任意の実数 p に対し, 対数の定義より $\boxed{\log_a a^p=p}$ $(\Longleftrightarrow \boxed{a^{\boxed{p}}=a^p})$

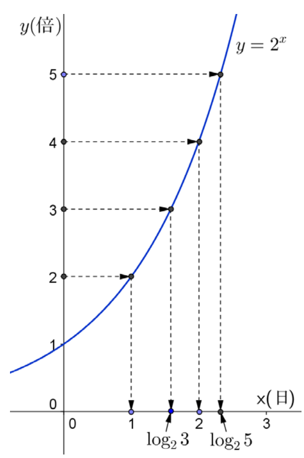
「$2^x=3 \Longleftrightarrow x=\log_2 3$」だから「$2^{\log_2 3}=3$」が成り立つ.

$\left(\begin{array}{l}\log_2 3 \text{ とは「2を何乗すると3になるかを表す数」} \\ \text{だから, 「}2^{\log_2 3}=3\text{」となるのは当然.}\end{array}\right)$

$a>0,\ a\neq 1, M>0$ の時「$a^x=M \Longleftrightarrow x=\log_a M$」だから

$$\boxed{a^{\log_a M}=M}$$

例えば, $2^{\log_2 8}=8,\quad 2^{\log_2 5}=5,\quad 3^{\log_3 9}=9,\ 3^{\log_3 10}=10$



[参考](数Ⅲによる説明)

「$y=a^x=f(x)$」と「$y=\log_a x=g(x)$」は互いに逆関数だから,

$$f(g(x))=x \ \text{かつ}\ g(f(x))=x$$

即ち $a^{\log_a x}=x$ かつ $\log_a a^x=x$

§2.対数の性質(対数の計算法則)

$M>0, N>0$で p は実数とする. このとき, 指数法則より次の関係が得られる.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{I.} & \log_a MN = \log_a M + \log_a N \\ \text{I'} & \log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N \\ \text{II.} & \log_a M^p = p\log_a M \end{array}}$$

[例]

Ⅰ. $\log_2 15 = \log_2(5\times 3) = \log_2 5 + \log_2 3$

Ⅰ' $\log_2 3 = \log_2 \dfrac{15}{5} = \log_2 15 - \log_2 5$

Ⅱ. $\log_2 3^4 = 4\log_2 3$, $\log_2 3^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\log_2 3$

これらの公式は, $M=a^p, N=a^q$ で, p,q が具体的な数字で表せる時は 分かり易い. 例えば,

$$\begin{cases} \log_2 2^3 + \log_2 2^4 = 3+4=7 \\ \log_2(2^3\times 2^4) = \log_2 2^7 = 7 \end{cases}$$ だから, $\log_2 2^3 + \log_2 2^4 = \log_2(2^3\times 2^4)$ $\leftarrow 2^x\times 2^y = 2^{x+y}$

$$\begin{cases} 4\log_2 2^3 = 4\times 3 = 12 \\ \log_2(2^3)^4 = \log_2 2^{12} = 12 \end{cases}$$ だから, $4\log_2 2^3 = \log_2(2^3)^4$ $\leftarrow (2^x)^y = 2^{xy}$

p,q が具体的な数で表せなくとも「$M=a^{\log_a M}$, $N=a^{\log_a N}$」と表せるから同様に証明できる.

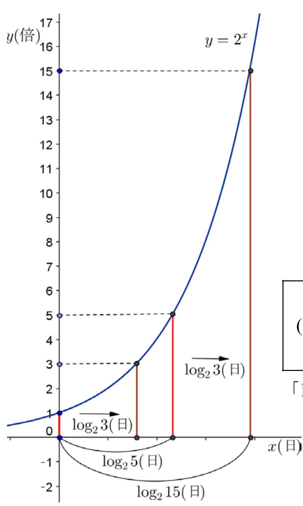
$$\begin{cases} MN = a^{\log_a MN} \\ MN = a^{\log_a M}\times a^{\log_a N} = a^{\log_a M+\log_a N} \end{cases}$$ だから, $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$ $\leftarrow a^x\times a^y = a^{x+y}$

「微生物」を使って「公式の意味」を考えます.

例えば 「$\log_2 5+\log_2 3=\log_2 15$」を考えます.

(これは次の質問を考えると明らかになります.)

1日あたり2倍に増える微生物があり, 初めに「1万匹」いた.
「5万匹 $\to$ 15万匹」に増えるのには, 何日かかるか?



「微生物の増える割合は一定」だから,

「5万匹 $\to$ 15万匹」に要する日数と

「1万匹 $\to$ 3万匹」に要する日数は等しい. よって

$\log_2 3$ 日.

一方

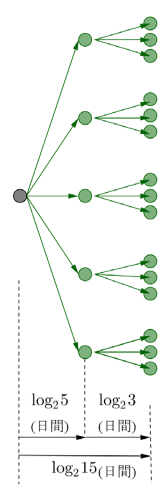
「1万匹 $\to$ 5万匹」に要する日数は $\log_2 5$ (日),

「1万匹 $\to$ 15万匹」に要する日数は $\log_2 15$ (日)

だから,

$\log_2 5+\log_2 3=\log_2 15$
(5倍になるのに要する日数)+(3倍になるのに要する日数)
=(15倍になるのに要する日数)

「$\log_2 M$ の M は "M 倍" を表す」と考えると分かり易い.



公式Ⅰから, 公式Ⅰ' は移項するだけで得られます．例えば,

$\log_2 5+\log_2 3=\log_2 15$ を移項して，　$\log_2 15-\log_2 5=\log_2 3$

また 公式Ⅰから, 公式Ⅱ「$\log_a M^p = p\log_a M$」も簡単に得られます．p が自然数の時,

$$\begin{cases} 2\log_2 M=\log_2 M+\log_2 M=\log_2(M\times M)=\log_2 M^2 \\ 3\log_2 M=\log_2 M+\log_2 M+\log_2 M=\log_2(M\times M\times M)=\log_2 M^3 \end{cases}$$

← (M²倍になるまでの時間)は (M倍になるまでの時間)の2倍

そして「$\log_2\dfrac{1}{M}+\log_2 M=\log_2\left(\dfrac{1}{M}\times M\right)=\log_2 1=0$」を使うと, p が負の整数の時,

$$\begin{cases} (-1)\log_2 M=\log_2\dfrac{1}{M}=\log_2 M^{-1} \\ (-2)\log_2 M=(-\log_2 M)+(-\log_2 M)=\log_2\dfrac{1}{M}+\log_2\dfrac{1}{M}=\log_2\left(\dfrac{1}{M}\times\dfrac{1}{M}\right)=\log_2 M^{-2} \end{cases}$$

さらに p が分数の時は，両辺を何倍かして等しいことを示します.

$$\begin{cases} 3\times\left(\dfrac{2}{3}\log_2 M\right)=2\log_2 M=\log_2 M^2 \\ 3\times\log_2 M^{\frac{2}{3}}=\log_2(M^{\frac{2}{3}})^3=\log_2 M^{\frac{2}{3}\times 3}=\log_2 M^2 \end{cases}$$

だから，　$\dfrac{2}{3}\log_2 M=\log_2 M^{\frac{2}{3}}$

底の変換公式

a,b,c は正の数で，$a\neq 1,\ b\neq 1,\ c\neq 1$ とするとき,

$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$　特に, $c=b$ のとき $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$

例えば,　$\log_3 5=\dfrac{\log_2 5}{\log_2 3}$,　$\log_3 5=\dfrac{1}{\log_5 3}$

これは底が 2と3 の 2つあり，微生物の例は使えない.

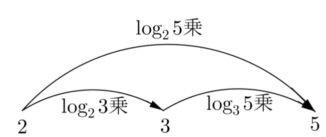
よって「$a^{\log_a M}=M$」を使うと,

「$2^{\log_2 3}=3,\ 3^{\log_3 5}=5$」より，$(2^{\log_2 3})^{\log_3 5}=5\ (=2^{\log_2 5})$　…①

ところが「$(a^x)^y=a^{xy}$」より, $(2^{\log_2 3})^{\log_3 5}=2^{\log_2 3\times\log_3 5}$　…②

よって,　$2^{\log_2 5}=2^{\log_2 3\times\log_3 5}$

$\therefore \log_2 3\times\log_3 5=\log_2 5$　　$\therefore \log_3 5=\dfrac{\log_2 5}{\log_2 3}$



底の変換公式は,

$$(\log_a b)\cdot(\log_b c) = \log_a c \quad \left(\Longleftrightarrow \log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}\right)$$

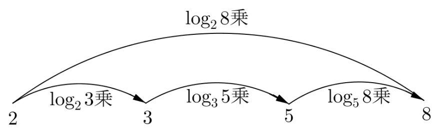
ともかける．同様にして,

$$(\log_a b)\cdot(\log_b c)\cdot(\log_c d) = \log_a d,$$

$$(\log_a b)\cdot(\log_b c)\cdot(\log_c d)\cdot(\log_d e) = \log_a e$$

なども成り立つ．例えば,

$$(\log_2 3)\cdot(\log_3 5)\cdot(\log_5 8) = \log_2 8 \ (=3)$$



$$\boxed{\begin{array}{c}((2^{\log_2 3})^{\log_3 5})^{\log_5 8} = (3^{\log_3 5})^{\log_5 8} = 5^{\log_5 8} = 8 = 2^{\log_2 8} \\ \therefore (\log_2 3)\cdot(\log_3 5)\cdot(\log_5 8) = \log_2 8\end{array}}$$

§3.常用対数

"10を底とする対数"を，特に"常用対数"と言う. 常用対数の値が分かれば「$\log_a M = \dfrac{\log_{10} M}{\log_{10} a}$」を使って, 全ての対数の値が求められる. コンピューターのない昔は,常用対数を使って, 大きな数の計算をやった. 「桁数の問題」として, 大学入試に出題されることも多い.

常用対数の例 $\boxed{\log_{10} 2 = 0.301 \cdots ①,\ \ \log_{10} 3 = 0.477 \cdots ②}$

①は, $2^{10} = 1024 \approx 10^3$ の両辺の対数をとって,

$$\log_{10} 2^{10} \approx \log_{10} 10^3 = 3 \quad \therefore 10\cdot\log_{10} 2 \approx 3 \quad \therefore \log_{10} 2 \approx 0.3$$

②は, $3^2 = 9 \approx 10$ の両辺の対数をとって,

$$\log_{10} 3^2 \approx \log_{10} 10 = 1 \quad \therefore 2\cdot\log_{10} 3 \approx 1 \quad \therefore \log_{10} 3 \approx 0.5$$

から 「何となく」納得できると思う．①と②から,

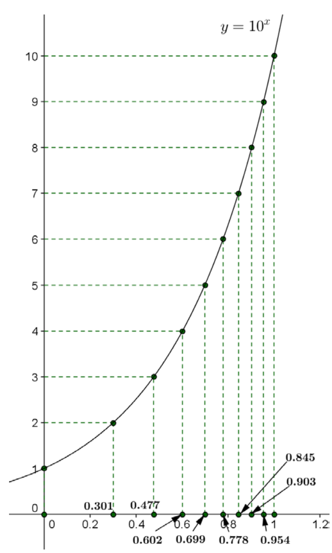
「$\log_{10} 7$ を除く」1桁の数の常用対数の値が求められる.

$\log_{10} 4 = \log_{10} 2^2 = 2\log_{10} 2 = 0.602,$

$\log_{10} 5 = \log_{10} \dfrac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - \log_{10} 2 = 0.699,$

$\log_{10} 6 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 0.778,$ $\quad \log_{10} 7 = 0.845,$

$\log_{10} 8 = \log_{10} 2^3 = 3\log_{10} 2 = 0.903,$ $\quad \log_{10} 9 = \log_{10} 3^2 = 2\log_{10} 3 = 0.954$



§4.練習問題

$A=3^{10}$の桁数と最高位の数字を求めよ.
但し $\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$ とする.
(例えば 23456 の場合は, 5桁の整数で最高位の数は 2.)

底を10とする対数を取って

$$\log_{10}A=\log_{10}3^{10}=10\ \log_{10}3=4.771$$

よって, $3^{10}=10^{4.771}=10^{0.771}\cdot 10^4\cdots$①

(ここで 右のグラフより, $10^{0.771}\approx 5.9\cdots$ であり, その小数点を右に4個ずらした数がAだから, Aは「最高位の数が 5 で 5 桁の整数」となる.
これを, もう少し厳密に書くとよい.)

ここで,

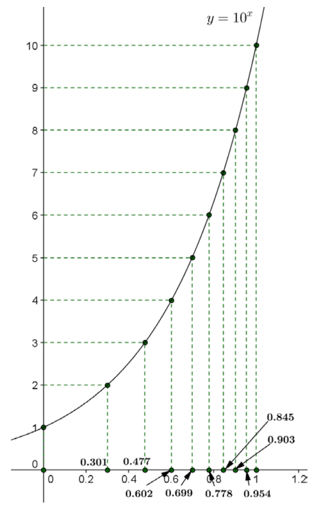
$$\begin{cases}\log_{10}5=\log_{10}\dfrac{10}{2}=1-\log_{10}2=0.6990,\\ \log_{10}6=\log_{10}2+\log_{10}3=0.7781\end{cases}$$

であるから, $10^{0.699}=5$, $10^{0.7781}=6$

よって $5<10^{0.771}<6$

各辺に 10^4 をかけて, $5\cdot 10^4<10^{4.771}<6\cdot 10^4$.

即ち $50000<A<60000$ だから, 最高位の数が 5で, 5 桁の数



$A=3^{10}(=10^{4.771}=10^{0.771}\cdot 10^4)$ の左から2つの数字(有効数字２桁)を求めよ.
但し 対数表を使ってよいものとする.
(例えば, 23456 の場合は「 2 と 3」となる.)

常用対数表 (2)

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189

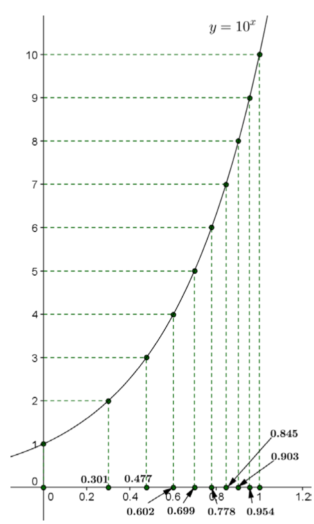
対数表より「 $10^{0.7709}=5.90$, $10^{0.7716}=5.91$ 」だから,

$$5.90<10^{0.771}<5.91$$

よって, $5.90\times 10^4<10^{4.771}<5.91\times 10^4$

すなわち $59000<A<59100$

よって, 左から２つの数字は「 5 と 9 」



高校生の方へのお願い

- 定理や公式の方が，問題より大切です．問題ばっかり解かないで，定理や公式を，もっと理解するようにしてください．
- 逆に，問題を解くことを通して，定理や公式を理解するようにしましょう．
- 定理や公式を理解するのは，図やグラフを描いたり，例を作ったりして「イメージ」を持つことも大切です．